# GARA DI MATEMATICA ON-LINE (15/01/2024)

**1. LONDRA, 1906. [3102]**

Trasformiamo il problema in una equazione: $200T+20R+2E+100D+10U+E=1001O+110T$ che possiamo anche scrivere $90T+20R+3E+100D+10U=1001O$.

Deduciamo immediatamente che $O=1$ visto che la somma a sinistra non potrà mai raggiungere il valore $2002$ nemmeno se le cifre fossero tutte $9$.

Siccome la cifra delle unità a destra è $1$, lo deve essere anche a sinistra ma $3E$ da $1$ come cifra delle unità solo se $E=7$.

Abbiamo quindi $90T+20R+21+100D+10U=1001$, cioè $9T+2R+10D+U=98$.

Cerchiamo ora i valori massimo e minino per "$OTTO$"

Minimo.

Proviamo con $T=2$ ($T=1$ non è possibile essendo già $O=1$)

$2R+10D+U=80$

Non potendo essere $D=8$ ($R=U=0$) e nemmeno $D=7$ in quanto $E=7$, cerchiamo soluzione per $D=6$

$2R+U=20$. Una soluzione si ha per $R=8$ e $U=4$.

Massimo.

Proviamo $T=9$: $2R+10D+U=17$ ma $D$ non può essere né $0$ né $1$, quindi è impossibile.

Proviamo $T=8$: $2R+10D+U=26$, ponendo $D=2$ abbiamo $2R+U=6$ che è risolto da $R=0$ e $U=6$.

La soluzione cercata è $1881+1221=3102$.

**2. VIALE DEI CILIEGI [28]**

$n$ dovrà verificare contemporaneamente le due disequazioni $10^2 \le n < 10^3$ e $2^6 \le n < 2^7$, cioè

$\begin{cases} 100 \le n \le 999 \\ 64 \le n < 128 \end{cases}$ la cui soluzione è $100 \le n < 128$ e quindi per $28$ valori.

**3. LA TATA SI LICENZIA [16]**

Siano $2x$ gli studenti presenti. La probabilità che i tre amici finiscano tutti e tre nella prima classe è $\frac{x}{2x}\cdot\frac{(x-1)}{2x-1}\cdot\frac{x-2}{2x-2}$. La stessa probabilità si ha per il caso che finiscano nella seconda classe.

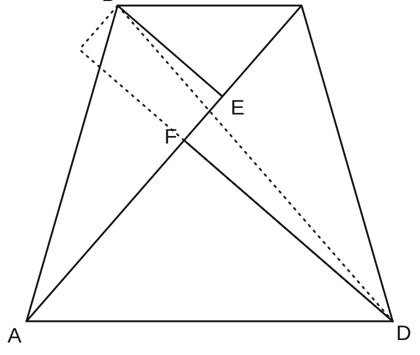
Quindi $\cancel{2}\,\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}\,\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{(x-1)}}{2x-1}\cdot\frac{x-2}{2\,\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{5}$ cioè $5x-10=4x-2$ che porta a $x=8$.

La soluzione cercata è $2x=16$.

**4. LA NUOVA GOVERNANTE [405]**

$$9!\ \text{secondi}=\frac{9!}{60}\ \text{min}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{60}}\ \text{min}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}{60}\ \text{ore}=100{,}8\ \text{ore}\cong 4\ \text{giorni}\ 5\ \text{ore}.$$

**5. MARY POPPINS [315]**




$A_{ABCD}=A_{ABC}+A_{ACD}=\frac{AC\cdot(BE+FD)}{2}$.

Tracciamo la diagonale $BD$.

Osserviamo che $(BE+FD)^2=BD^2-FE^2=35$.

Quindi $A_{ABCD}=\frac{AC\cdot(BE+FD)}{2}=\frac{6\sqrt{35}}{2}=3\sqrt{35}\ \text{cm}^2$.

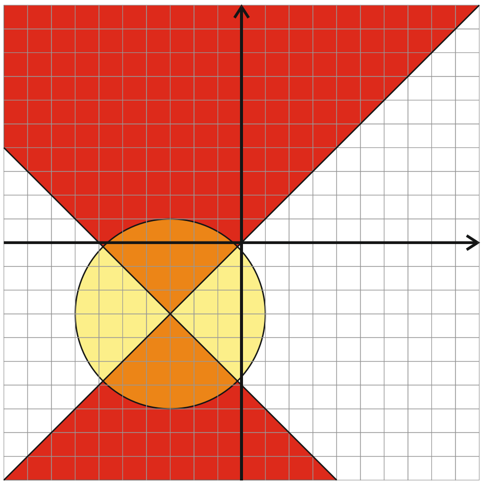
La soluzione richiesta è $\left(3\sqrt{35}\right)^2=315$.

**6. MARY POPPINS INCONTRA JANE E MICHAEL [2513]**

Riscriviamo correttamente il sistema inserendo l'espressione analitica di $f(x)$:

$$\begin{cases} x^2+6x+1+y^2+6y+1\le 0 \\ x^2+6x+1-y^2-6y-1\le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+6x+6y+2\le 0 \\ x^2-y^2+6x-6y\le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2\le 16 \\ (x-y)(x+y+6)\le 0 \end{cases}.$$

La prima equazione rappresenta un cerchio di centro $(-3;-3)$ e raggio $4$, mentre la seconda equazione sono due rette parallele alle bisettrici dei quadranti che si intersecano nello stesso punto.



L'area cercata è la parte comune disegnata in arancione e corrisponde a mezzo cerchio: $A=\dfrac{\pi 4^2}{2}=8\pi\ \text{cm}^2\cong 2513,28\ \text{mm}^2$

**7. CHI BEN COMINCIA… [447]**

Sia $k=MCD(a,b)$, allora esistono $x$ e $y$ ($x<y$), primi tra loro, tali che $a=kx$ e $b=ky$. Siccome $\text{mcm}(a,b)=kxy$, la condizione assegnata può essere scritta $kxy-k=89$, cioè $k(xy-1)=89$. Siccome $89$ è primo, $k=1$ oppure $k=89$.

Nel primo caso $xy-1=89$, cioè $xy=90$ che è verificato per $(1;90)$ $(2;45)$ $(5;18)$ $(9;10)$ (N.B $a=x$ e $b=y$).

Nel secondo caso $xy-1=1$ cioè $xy=2$ che ha la sola soluzione $x=1$ e $y=2$ aggiungendo la coppia $(89;178)$ alle soluzioni fin qua trovate.

La somma cercata è $1+90+2+45+5+18+9+10+89+178=447$.

**8. AL PARCO [19]**

I casi possibili sono $\underbrace{\boxed{4}}_{\text{no }1}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}=4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=96$, mentre i casi favorevoli sono $\underbrace{\boxed{3}}_{\text{no }1\text{e}2}\ \underbrace{\boxed{1}}_{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}=3\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1=18$.

La probabilità cercata è $P=\dfrac{18}{96}=\dfrac{3}{16}$

La risposta richiesta è $3+16=19$.

**9. NEL QUADRO [23]**

Se $P(x)=h(x)\left(x^2+x+1\right)+x+2=k(x)\left(x^2+1\right)+2x+1$, il suo grado minimo potrebbe essere $3$. Supponiamo che lo sia, e siano $h(x)=ax+b$ e $k(x)=cx+d$. Svolgiamo i calcoli dell'uguaglianza:

$$(ax+b)\left(x^2+x+1\right)+x+2=(cx+d)\left(x^2+1\right)+2x+1;$$

$$ax^3+ax^2+ax+bx^2+bx+b+x+2=cx^3+cx+dx^2+d+2x+1;$$

Affinché i due polinomi siano identicamente uguali dovrà essere $a=c$;

$$\cancel{ax^3}+ax^2+\cancel{ax}+bx^2+bx+b+x+2=\cancel{ax^3}+\cancel{ax}+dx^2+d+2x+1;$$

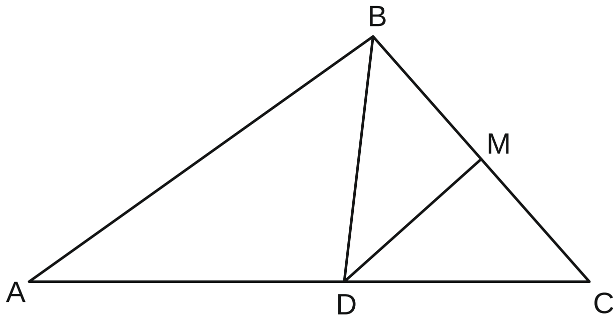
$$(a+b-d)x^2+(b-1)x+b-d+1=0;$$

quindi $b=1$ e di conseguenza $d=2$ e $a=1$.

$$P(x)=(x+1)\left(x^2+x+1\right)+x+2=x^3+2x^2+3x+3$$

La soluzione cercata è $1^2+2^2+3^2+3^2=23$.

**10 SUPERCALIFRAGILISTICHESPIRALIDOSO [3130]**



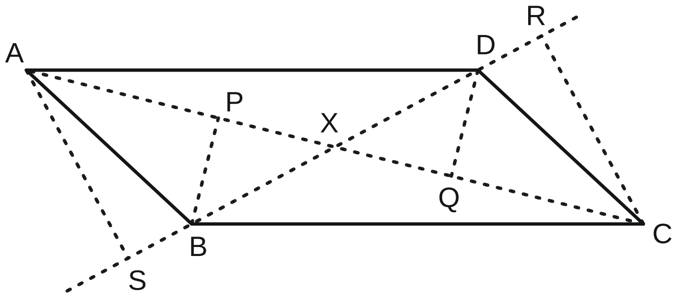

Per il teorema della bisettrice $AB = 90k$ e $BC = 70k$.
Osserviamo che detto $A\hat{C}B = \alpha$ , anche $D\hat{B}C = \alpha$, così come $A\hat{B}D = \alpha$ e quindi $A\hat{D}B = 2\alpha$.
I triangoli $ADB$ e $ABC$ sono simili, quindi
$AC : AB = AB : AD$ cioè
$(90k)^2 = 160 \cdot 90$ che porta a determinare $k = \frac{4}{3}$.
$AB = 120$ m.
$A_{ABD} = \sqrt{140 \cdot (140-120)(140-90)(140-70)} = \sqrt{140 \cdot 20 \cdot 50 \cdot 70} = 1400\sqrt{5} \cong 3130{,}54 \text{ cm}^2$

**11. LA NINNA NANNA [10]**
Chiediamoci chi potrebbe rispondere a $f_1(k) = 12$. Per la definizione di $f_1$, tutti gli $n \in \mathbb{N}$ con $1 \le n \le 50$ che hanno $6$ divisori e quindi numeri della forma $n = p^5$ oppure $n = p \cdot q^2$.
Del primo tipo abbiamo solo $32$, mentre del secondo tipo abbiamo $12$, $18$, $20$, $28$, $44$, $45$ e $50$.
Siccome $f_1(12) = 12$ dobbiamo vedere se esistono numeri che entrano nella catena passando per uno qualsiasi degli altri numeri. $18 : 2 = 9$ esiste $36$ che ha proprio $9$ divisori e $20 : 2 = 10$ ed esiste $48$ che ha proprio $10$ divisori.
Numeri con $28 : 2 = 14$ divisori sono maggiori di $50$.
La risposta richiesta è $10$.

**12. GIOIA IN CASA BANKS [3]**
Passiamo in rassegna ciascuno dei numeri cercando di fattorizzarli, sia con metodi numerici che algebrici.
(1) $2^{606} - 1 = \left(2^{303} - 1\right)\left(2^{303} + 1\right)$. Ogni tre numeri consecutivi vi è sempre un divisore di 3. Siccome $2^{303}$ non è divisibile per $3$ lo è sicuramente o il suo precedente o il suo successivo.
(2) Dal caso precedente sappiamo che $2^{606} + 1$ non può essere divisibile per $3$.
Proviamo a vedere se lo è per $5$. Siccome $\varphi(5) = 4$, per il Teorema di Eulero abbiamo che $2^4 \equiv 1 \bmod 5$ e quindi $2^{606} + 1 = \left(2^4\right)^{151} \cdot 2^2 + 1 \equiv 1 \cdot 4 + 1 = 0 \bmod 5$ Il numero è divisibile per $5$.
(3) $2^{607} - 1 = \left(2^2\right)^{303} \cdot 2 - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \bmod 3$, non è divisibile per $3$;
$2^{607} - 1 = \left(2^4\right)^{151} \cdot 2^3 - 1 \equiv 8 - 1 \equiv 2 \bmod 5$, non è divisibile per $5$;
$2^{607} - 1 = \left(2^6\right)^{101} \cdot 2 - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \bmod 7$, non è divisibile per $7$;
(4) $2^{607} + 1$. Sfruttiamo il lavoro fatto al punto precedente. Si vede che aggiungendo $2$ al numero del caso (3) si ottiene un multiplo di $3$
(5) $2^{607} + 3^{607}$ non può essere divisibile per $3$. Verifichiamo la divisibilità per $5$:
$2^{607} + 3^{607} = \left(2^4\right)^{151} \cdot 2^3 + \left(3^4\right)^{151} \cdot 3^3 \equiv 8 + 27 = 35 \equiv 0 \bmod 5$. Il numero è divisibile per $5$.
Solo il numero al (3) non ha divisori primi minori di $10$.

**13. LO ZIO ALBERT [26]**
Affinché entrambe le equazioni non abbiano soluzioni reali distinte, dovranno avere i discriminanti minori o uguali a zero: $b^2 - 4c \le 0$ e $c^2 - 4b \le 0$. Notiamo che le relazioni sono simmetriche. Ricavando $b$ dalla seconda abbiamo che $b \ge \frac{c^2}{4}$ ed inserendo questa informazione nella prima si ottiene $0 \le b^2 - 4c \le \frac{c^4}{16} - 4c$ cioè $c\left(c^3 - 64\right) \le 0$.
Ora $c$ è positivo $c^3 \le 64$, cioè $0 < c \le 4$
Se $c = 1$ abbiamo $b^2 \le 4$ e quindi le soluzioni $(1;1)$, $(2;1)$ e per simmetria $(1;2)$;
Se $c = 2$ abbiamo $b^2 \le 8$ ed oltre alle soluzioni già trovate abbiamo in più $(2;2)$;
Se $c = 3$ abbiamo $b^2 \le 12$ e si aggiunge solo la soluzione $(3;3)$;
Se $c = 4$ si aggiunge solo la soluzione $(4;4)$;
La soluzione richiesta è $1+1+1+2+2+1+2+2+3+3+4+4 = 26$.

**14. IN BANCA [128]**




Sia $X$ il punto di incontro delle diagonali.
Osserviamo che $AC^2 = 4AX^2 = 4\left(AS^2 + SX^2\right)$. (*)
Ora consideriamo i triangoli $ASX$ e $PBX$ che sono simili, e quindi $AS : PB = SX : PX$ dalla quale possiamo ricavare $AS = \dfrac{PB \cdot SX}{PX}$.

Osserviamo che $A_{ABCD} = PB \cdot AC$ e quindi $PB = \dfrac{24\sqrt{2}}{AC}$ e quindi $AS = \dfrac{24\sqrt{2}}{AC} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{32\sqrt{2}}{AC} = \dfrac{32\sqrt{2}}{2AX} = \dfrac{16\sqrt{2}}{AX}$.

(N.B lavoriamo con $AX$ per semplificare i calcoli numerici che seguono.)
Inserendo questo valore nell'equazione (*) si ha

$$\cancel{4}AX^2 = \cancel{4}\left(\frac{512}{AX^2} + 16\right)$$

Cioè $AX^4 - 16AX^2 - 512 = 0$ che ha come unica soluzione accettabile $AX^2 = 32 \text{ cm}^2$ e quindi $AC^2 = 128 \text{ cm}^2$.

**15. PER 2 PENNY [6]**

Osserviamo che $\dfrac{n+1000}{70} \in \mathbb{N}$, quindi $n + 1000 \equiv 0 \bmod 70$ cioè $n \equiv 50 \bmod 70$ e quindi i valori cercati dovranno essere del tipo $50 + 70k$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$.
Osserviamo poi che $\sqrt{n} \leq \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor < \sqrt{n} + 1$, quindi

$$\begin{cases} \dfrac{n+1000}{70} \geq \sqrt{n} \\ \dfrac{n+1000}{70} < \sqrt{n} + 1 \end{cases} \text{ che risolte portano a } \begin{cases} 20 \leq \sqrt{n} \leq 50 \\ \sqrt{n} < 35 - \sqrt{155} \vee \sqrt{n} > 35 + \sqrt{155} \end{cases}$$

Elevando tutto al quadrato ed intersecandole abbiamo $400 \leq n < 508 \vee 2251 < n \leq 2500$.
$400 \leq 50 + 70k < 508$ ha soluzione solo per $k = 5$ e $k = 6$, mentre
$2251 < 50 + 70k \leq 2500$ ha soluzioni $k = 32$, $k = 33$, $k = 34$ e $k = 35$.
In totale abbiamo $6$ soluzioni.

**16. SPAZZACAMIN [456]**

$$810064 = 900^2 + 8^2 = 900^2 + 8^2 + 2 \cdot 900 \cdot 8 - 2 \cdot 900 \cdot 8 = \left(900 + 8\right)^2 - 120^2 = (908 + 120)(908 - 120) =$$
$$1028 \cdot 788 = 2^2 \cdot 257 \cdot 2^2 \cdot 197 = 2^4 \cdot 197 \cdot 257.$$

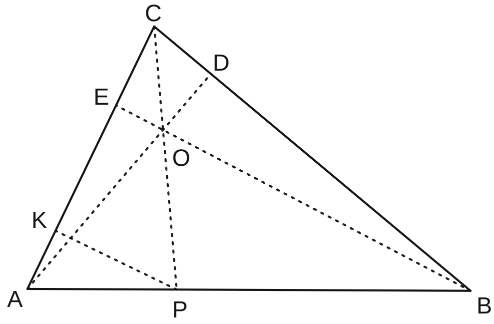
**17. UN'AVVENTURA SUI TETTI DI LONDRA [55]**

Siano $i$, $i + k$ e $i + 2k$ i tre contenitori equidistanti, e supponiamo che la prima pallina vada nel contenitore $i$, la seconda in quello $i + k$ e la terza nel $i + 2k$. Alla fine ci basterà moltiplicare il risultato per $6$ per avere un ordine qualsiasi. Calcoliamo quindi:

$$P = \sum_{\substack{i=1..+\infty \\ k=1..+\infty}} \left(\frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^{i+k}} \cdot \frac{1}{2^{i+2k}}\right) = \left(\sum_{\substack{i=1..+\infty \\ k=1..+\infty}} \frac{1}{2^{3i}} \cdot \frac{1}{2^{3k}}\right) = \sum_{i=1..+\infty} \frac{1}{2^{3i}} \cdot \sum_{k=1..+\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \left(\sum_{i=1..+\infty} \frac{1}{2^{3i}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^3}}\right)^2 = \frac{1}{49}.$$

La probabilità cercata è $6P = \dfrac{6}{49}$ e la soluzione richiesta è $6 + 49 = 55$.

**18. LA FINE DELLA FESTA [242]**




Tracciamo la parallela a $BE$ uscente da $P$ che incontra in $K$ il lato $AC$.
Detto $CE = x$, abbiamo, per Talete che $EK = 2x$.

Analogamente, sfruttando $AP = \frac{1}{3}AB$ abbiamo che $AK = x$.

$$CE = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}968 = 242 \text{ cm}.$$

**19. LICENZIATO MA FELICE [208]**

Sfruttiamo le relazioni radici-coefficienti.

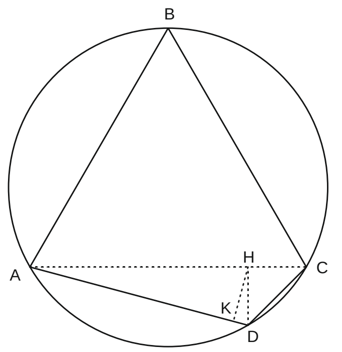
$$d = f(z_1)\cdot f(z_2)\cdot f(z_3)\cdot f(z_4) = (4i)^4\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}\cdot\overline{z_4} = 256\cdot\overline{z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4}.$$

Ma da $p(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$ sappiamo che $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4 = 1$ e quindi $d = 256$.

$$b = f(z_1)\cdot f(z_2) + f(z_1)\cdot f(z_3) + f(z_1)\cdot f(z_4) + f(z_2)\cdot f(z_3) + f(z_2)\cdot f(z_4) + f(z_3)\cdot f(z_4) =$$

$= (4i)^2(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} + \overline{z_1}\cdot\overline{z_3} + \ldots + \overline{z_3}\cdot\overline{z_4}) = -16\left(\overline{z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_3z_4}\right) = -16\cdot\overline{3} = -48$, dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato il fatto che da $p(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$ il coefficiente di $z^2$ è proprio quello che abbiamo sotto l'operazione di coniugio. La soluzione richiesta è $b + d = 256 - 48 = 208$.

**20. IL VENTO È CAMBIATO [116]**




<u>Prima soluzione</u>

Tracciamo l'altezza $DH$ del triangolo $ADC$ e tracciamo l'altezza $HK$ del triangolo $ADH$. La particolarità del triangolo rettangolo di $15°$ è quella di avere l'altezza che è $\frac{1}{4}$ dell'ipotenusa e quindi, nel nostro caso misura $3\,\text{cm}$. L'area $A_{ADH} = \frac{12\cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2$.

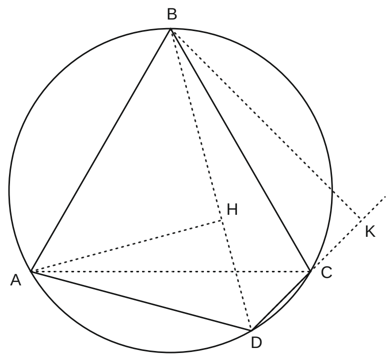
Siano $x$ e $12 - x$ le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa $AD$. Per il secondo teorema di Euclide si ha: $x:3 = 3:(12-x)$ che risolta porta a trovare $x = 6 \pm 3\sqrt{3}$ che, vista la simmetria corrispondono a $AK = 6 + 3\sqrt{3}$ e $kD = 6 - 3\sqrt{3}$.

Calcoliamo $HD$ con il primo teorema di Euclide: $KD:HD = HD:AD$ e quindi $HD = \sqrt{12\cdot(6-3\sqrt{3})}$.

Siccome $H\hat{C}D = 45°$ $HD = HC$ e $A_{HDC} = \frac{12\cdot(6-3\sqrt{3})}{2} = 36 - 18\sqrt{3}$.

Per il Teorema dei Seni: $\frac{AC}{\text{sen}120°} = \frac{AD}{\text{sen}\,45°}$ e quindi $AC = 6\sqrt{6}$ cm

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADH} + A_{HDC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(6\sqrt{6}\right)^2 + 18 + 36 - 18\sqrt{3} = 54 + 36\sqrt{3} \cong 116{,}3556 \text{ cm}^2.$$




<u>Seconda soluzione</u>

Tracciamo il segmento $BD$ e osserviamo che $BD = AD + DC$ (applicando al quadrilatero $ABCD$ il Teorema di Tolomeo).
Sia $H$ il piede dell'altezza del triangolo $ABD$ mandata da $A$.
Siccome $C\hat{A}D = C\hat{B}D = 15°$ e $A\hat{C}D = A\hat{B}D = 45°$ il triangolo $AHB$ risulta essere isoscele rettangolo e il triangolo $AHD$ mezzo triangolo equilatero.
Quindi $DH = 6$ cm e $BH = AH = 6\sqrt{3}$ cm. $BD = 6 + 6\sqrt{3} = 6(1+\sqrt{3})$ cm.
Sia ora $BK$ la perpendicolare mandata da $B$ su $DC$. Anche $BDK$ è mezzo triangolo equilatero e quindi $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}BD = 3\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ cm.

Per quanto detto sopra $DC = BD - AD = 6\left(\sqrt{3}-1\right)$ cm e quindi:

$$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{BCD} = \frac{1}{2}BD\cdot AH + \frac{1}{2}DC\cdot BK = 54 + 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cong 116{,}3556 \text{ cm}^2$$